Netanya Academic College
16 Kibutz-Galuyot St.
Kiryat Yitzhak Rabin
Netanya 42365, ISRAEL

המכללה האקדמית נתניה
רחוב קיבוץ גלויות 16
קרית יצחק רבין
נתניה 42365

לוגיקה ותיכנות לוגי - ביה"ס למדעי המחשב

פיתרון בחינת סוף סמסטר ב', תש"ס - 30.7.00 - מועד ב'

1. *(10%)* נגדיר את הקשרים הלוגיים $\uparrow$, $\sqcup$, ע"י טבלאות האמת הבאות:

p	q	$p \uparrow q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

p	q	$p \sqcup q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

האם ניתן להגדיר את הקשר הלוגי $\sqcup$ באמצעות הקשר $\uparrow$?
אם תשובתך חיובית, רשום את ההגדרה בלבד.
אם תשובתך שלילית, תן נימוק קצר לכך
(אין צורך בהוכחה פורמלית מלאה).

תשובה:

הקשר $\uparrow$ (שנקרא גם NAND) מהווה מערכת שלמה של קשרים. כלומר, ניתן להגדיר באמצעותו כל קשר לוגי אחר. קיימות מספר דרכים להגדיר את הקשר $\sqcup$. הגדרה אחת היא:

$$p \sqcup q \Leftrightarrow (p \uparrow (q \uparrow q)) \uparrow ((p \uparrow p) \uparrow q)$$

ניתן להגיע אליה באמצעות השקילויות הברורות הבאות

$$p \uparrow q \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \qquad \neg p \Leftrightarrow p \uparrow p \qquad p \sqcup q \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$$

הוכחת ההגדרה תתבצע כדלהלן:

$$\begin{aligned}
p \sqcup q &\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \\
&\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg\neg q) \vee \neg(\neg\neg p \vee \neg q) \\
&\Leftrightarrow \neg(p \uparrow \neg q) \vee \neg(\neg p \uparrow q) \\
&\Leftrightarrow (p \uparrow \neg q) \uparrow (\neg p \uparrow q) \\
&\Leftrightarrow (p \uparrow (q \uparrow q)) \uparrow ((p \uparrow p) \uparrow q)
\end{aligned}$$

.2 (16 נתון מבנה $\mathcal{U}$ בשפת תוושיב הפרדיקאטים

$$U = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$$

$$P = \{x \in U \mid 0.5 < x \leq 1\}$$

$$Q = \{x \in U \mid 0 \leq x < 0.5\}$$

$$R = \{(x,y) \in U^2 \mid x + y \geq 0.5\}$$

כאשר P ו-Q פרדיקאטים חד-מקומיים,

R הוא יחס בינארי.

לגבי כל אחד מהפסוקים הבאים,

קבע אם הוא אמיתי או שקרי במבנה $\mathcal{U}$.

תן נימוק <u>קצר</u> לקביעתך.

א. $\forall x\, [P_x \to \exists y\, [\neg Q_y \wedge \neg R_{xy}]]$

ב. $\forall x\, \forall y\, [(\neg P_x \wedge \neg Q_x) \to R_{xy}]]$

ג. $\exists x\, [R_{xx} \wedge \forall y\, \forall z\, [(R_{xy} \wedge R_{xz}) \to R_{yz}]]$

ד. $\forall x\, \forall y\, \forall z\, [(\neg R_{xy} \wedge \neg R_{yz}) \to \neg R_{xz}]$

<u>תשובות:</u>

א. <u>**לא נכון**</u>. למשל $x = 0.51$ מקיים את הרישא P_x, אך לא קיים y המקיים $\neg Q_y$ אשר עבורו יתקיים $\neg R_{xy}$.

ב. <u>**נכון**</u>. המספר היחיד x המקיים את הרישא $\neg P_x \wedge \neg Q_x$ הוא $x = 0.5$! ברור אז שלכל y יתקיים בהכרח $x + y \geq 0.5$, כלומר R_{xy}.

ג. <u>**נכון**</u>. קיים x המקיים את הטענה. הערך שלו הוא $x = 0.25$. ברור שהוא מקיים את הטענה R_{xx} (כי $x + x = 0.5 \geq 0.5$). כל ערך y המקיים R_{xy} מקיים בהכרח $y \geq 0.25$. כנ"ל עבור z. לכן בהכרח $y + z \geq 0.5$, כלומר R_{xy}.

ד. <u>**לא נכון**</u>. אם נקח למשל $x = 0.3$, $y = 0.1$, $z = 0.3$, אז הרישא $\neg R_{xy} \wedge \neg R_{yz}$ מתקיימת, אך ברור כי הסיפא R_{xz} אינה נכונה.

3. לפניך קבוצה של שלושה פסוקים בתחשיב הפרדיקאטים.
אם קבוצת הפסוקים היא עקבית, מצא מבנה
מתאים המספק את כל הפסוקים בקבוצה.
אם קבוצת הפסוקים אינה עקבית,
הוכח סתירה לוגית מתוכה.

1. $\forall x\,[P_x \rightarrow (\neg Q_x \wedge \neg R_x)]$
2. $\forall x\,[\neg S_x \rightarrow R_x]$
3. $\neg\forall x\,[P_x \rightarrow S_x]$

<u>תשובה:</u> קבוצת הפסוקים אינה עקבית. להלן הוכחת סתירה לוגית:

4.	$\exists x\,\neg[P_x \rightarrow S_x]$	3, Q1
5.	$\exists x\,[P_x \wedge \neg S_x]$	4, PL
6.	$P_a \wedge \neg S_a$	5, EP[x/a]
7.	P_a	6, PL
8.	$P_a \rightarrow (\neg Q_a \wedge \neg R_a)$	1, US[x/a]
9.	$\neg Q_a \wedge \neg R_a$	7, 8, MP
10.	$\neg S_a \rightarrow R_a$	2, US[x/a]
11.	$\neg S_a$	6, PL
12.	R_a	10, 11, MP
13.	$\neg R_a$	9, PL
14.	$R_a \wedge \neg R_a$	12, 13, Contradiction

4. לפניך שלושה טיעונים בשפת תחשיב הפרדיקאטים. לגבי כל טיעון, אם הוא טיעון תקף, רשום הוכחה מלאה לתקפותו. אם אינו תקף, הוכח את אי-תקפותו על ידי מציאת מבנה מתאים.

א.

1. $\exists x\, P_x$
2. Q_a
3. $\neg\exists x\,[P_x \wedge R_{xa}]$
4. $\forall x\,\left[P_x \rightarrow \forall y\,[(\neg S_y \wedge Q_y) \rightarrow R_{xy}]\right]$

S_a

<u>תשובה:</u> הטיעון תקף. להלן הוכחה:

5.	P_b	1, EP[x/b]
6.	$\forall x\,\neg[P_x \wedge R_{xa}]$	3, Q2
7.	$\forall x\,[\neg P_x \vee \neg R_{xa}]$	6, PL
8.	$\neg P_b \vee \neg R_{ba}$	7, US[x/b]
9.	$\neg R_{ba}$	5, 8, PL
10.	$P_b \rightarrow \forall y\,[(\neg S_y \wedge Q_y) \rightarrow R_{by}]$	4, US[x/b]
11.	$\forall y\,[(\neg S_y \wedge Q_y) \rightarrow R_{by}]$	5, 10, MP
12.	$(\neg S_a \wedge Q_a) \rightarrow R_{ba}$	11, US[y/a]
13.	$\neg R_{ba} \rightarrow (S_a \vee \neg Q_a)$	12, PL
14.	$S_a \vee \neg Q_a$	9, 13, MP
15.	S_a	2, 14, PL

ב.

1. $\forall x\, \forall y\, [(B_x \wedge C_y) \rightarrow (R_{xy} \wedge \neg R_{yx})]$
2. $\forall x\, [\neg B_x \rightarrow \neg A_x]$
3. $\exists x\, [A_x]$

$\exists x\, [\neg C_x]$

תשובה: הטיעון תקף. להלן הוכחה:

4.	$\neg \exists x\, [\neg C_x]$	Proof By Contradiction
5.	$\forall x\, [C_x]$	4, Q2
6.	A_a	3, EP[x/a]
7.	C_a	5, US[x/a]
8.	$\neg B_a \rightarrow \neg A_a$	2, US[x/a]
9.	$A_a \rightarrow B_a$	8, PL
10.	B_a	6, 9, MP
11.	$B_a \wedge C_a$	7, 10, PL
12.	$(B_a \wedge C_a) \rightarrow (R_{aa} \wedge \neg R_{aa})$	1, US[x/a,y/a]
13.	$R_{aa} \wedge \neg R_{aa}$	11, 12, Contradiction

ג.

1. $\forall x\, \forall y\, [(A_x \wedge B_y) \rightarrow x = y]$
2. $\forall x\, \forall y\, [R_{xy} \rightarrow (\neg A_x \vee \neg B_y)]$
3. $\exists x\, [A_x]$

$\exists x\, [\neg R_{xx}]$

תשובה:

הטיעון אינו תקף. להלן מבנה המקיים את ההנחות אך אינו מקיים את המסקנה:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
U &= \{1, 2\} \\
A &= \{1\} \\
B &= \{\} \\
R &= \{(1,1), (2,2)\}
\end{aligned}
}
$$

5. (ו בעיה בשפת PROLOG: כתוב את הפרדיקאט lmax(L,M) המקבל כקלט רשימת מספרים שלמים L, מספר שלם M, ומצליח רק אם M הוא מספר מקסימלי ברשימה L. לדוגמא:

```
?- lmax([3,5,3,8,-4,8,2],X).
 X=8
```

<u>תשובה:</u> נציג שלושה פיתרונות שונים לבעייה.

```
%%%%%%% Solution 1
last_member(L,M) :- append(_,[M],L).
lmax(L,M) :- sort(L,S), last_member(S,M).
%%%%%%% Solution 2
lmax(L,M) :- member(M,L), integer(M), findall(X,(member(X,L),X=<M),L).
%%%%%%% Solution 3
lmax([X],X) :- integer(X).
lmax([X,Y],M) :- integer(X), integer(Y), M is X, X>=Y.
lmax([X,Y],M) :- integer(X), integer(Y), M is Y, Y>=X.
lmax([H|T],M) :- integer(H), M is H, lmax(T,M).
lmax([H|T],M) :- integer(H), lmax(T,M), H=<M.
```

6. *(10%)* בעיה בשפת PROLOG: כתוב את הפרדיקאט count2(L,C) המקבל כקלט שתי רשימות L, C, ומצליח רק אם C היא רשימת כל העצמים המופיעים פעמיים בדיוק ברשימה L. דוגמא:

```
?- count2([1,avi,shuli,52,-9.12,avi,52,53],C).
 C=[avi,52]
?- count2([a,b,c,a,d,a],C).
 C=[]
```

<u>תשובה:</u>

```
% The predicate member2 succeeds only if M appears exactly 2 times in L:
member2(L,M) :- member(M,L), findall(X,(member(X,L),X==M),F), length(F,2).
% The solution is:
count2(L,C) :- setof(X,member2(L,X),C).
```